



UNIVERSIDAD  
DE LOS ANDES  
MERIDA VENEZUELA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
INSTITUTO DE ESTADÍSTICA APLICADA

---

MODELOS

ARMA

---

ARCH – GARCH

# Modelos ARCH-GARCH

1-PROCESOS HETEROCEDASTICOS

2-PROCESO ARCH

3-PROCESO GARCH

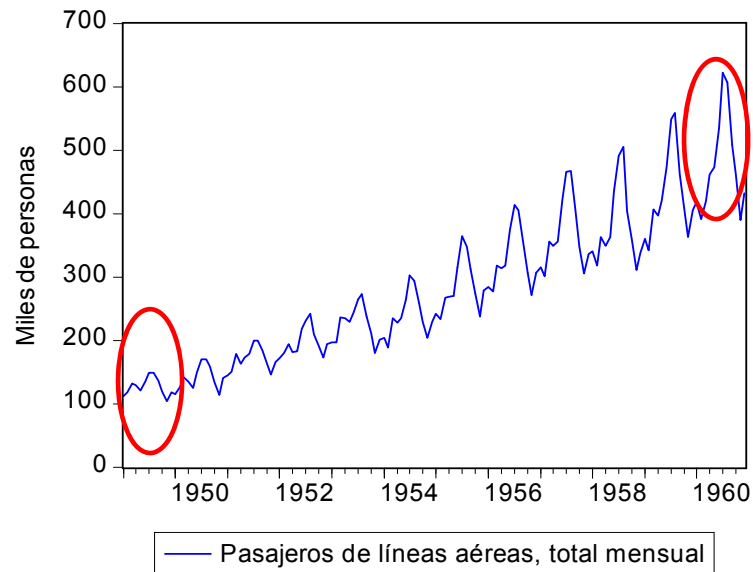
4-ESTIMACION DE VOLATILIDAD

5-ESTIMACION DE PARAMETROS GARCH:

MAXIMA VEROSIMILITUD

6-ESPECIFICACION MODELO GARCH

7-PRONÓSTICO VARIANZA CONDICIONADA.

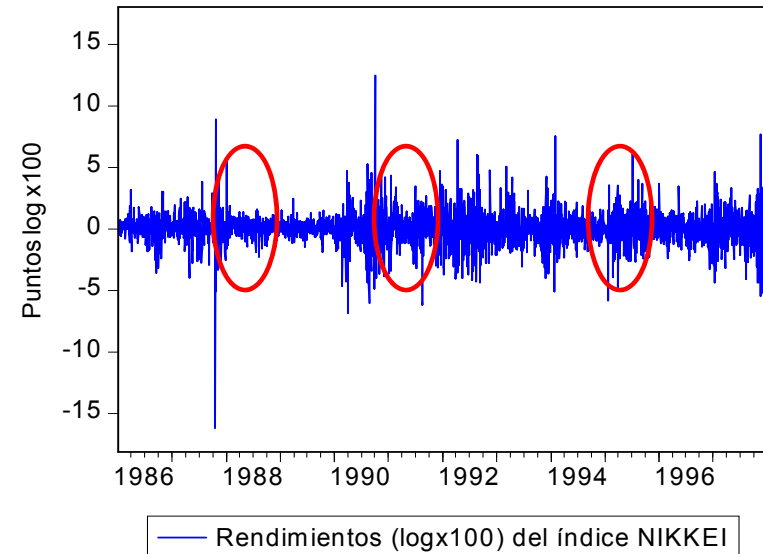


## Número Pasajeros líneas aéreas.

La serie muestra:

- Tendencia
- Variaciones Estacionales
- Variabilidad creciente con el nivel de la serie (Heterocedasticidad)

MODELOS ARIMA



## Rendimiento Índice NIKKEI BolsaTokio

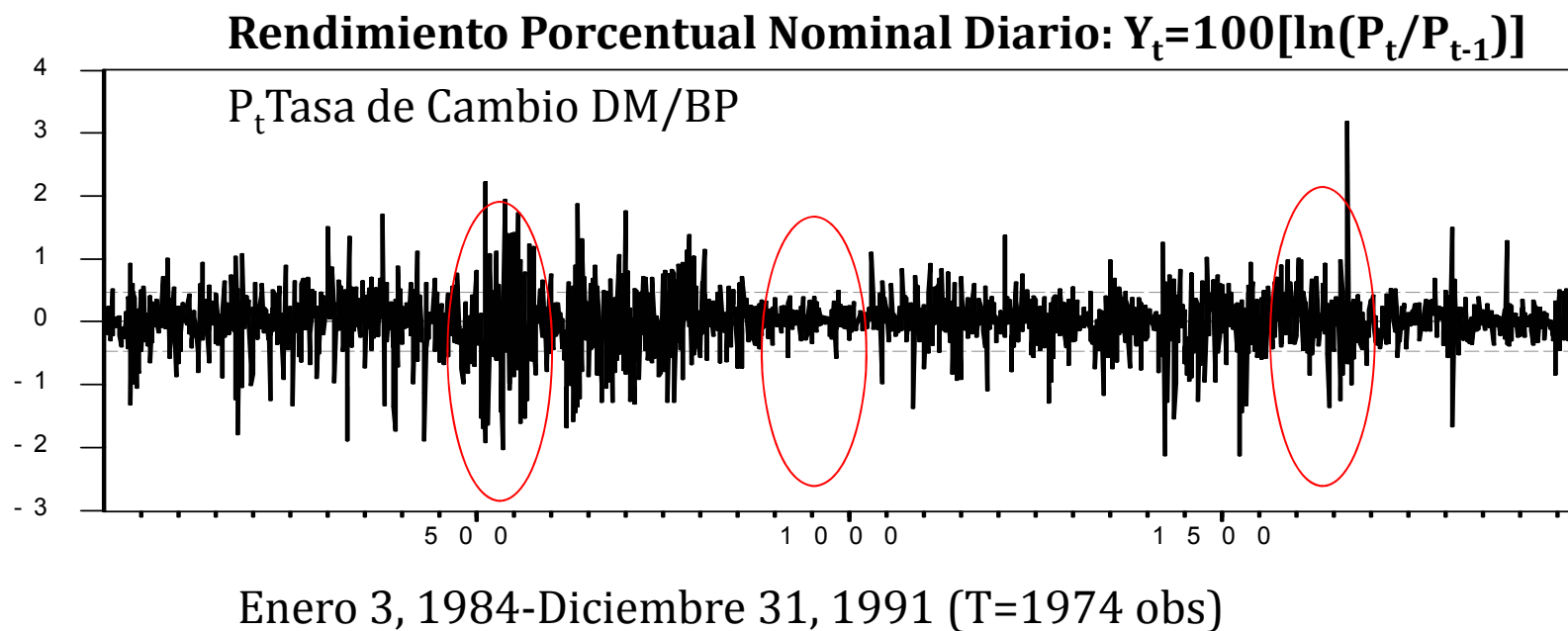
La serie:

- Fluctúa de forma estable en torno a una media nula
- Muestra períodos de alta y baja volatilidad
- Presencia de Volatilidad: heterocedasticidad variable

MODELOS ARCH-GARCH

# Volatilidad

- Volatilidad:
  - Indicador fundamental para cuantificar riesgos financieros
  - Medida de dispersión de los rendimientos respecto de su media en un período determinado. Desviación Estándar de los rendimientos
- Serie Heterocedástica: la volatilidad no es constante en el tiempo.



Bollerslev,T;Ghysels,E, "Periodic Autoregressive Conditional Heteroscedasticity"  
*Journal of Business and Economic Statistics*, Vol 14, 1996, pp. 139-151.

# 1- Procesos Estocásticos HETEROCEDASTICOS

- Muchas ST se caracterizan por periodos de relativa tranquilidad, y también exhiben periodos que son volátiles.
- Este comportamiento de las ST hace que la varianza se muestre relativamente constante durante algunos periodos, pero se torna volátil durante otros periodos. La volatilidad de la ST no es constante en el tiempo.
- Estas series son ST Heterocedásticas Condicionales (HrC):
  - Las ST-HrC tienen Varianza NO Condicional (varianza de largo plazo) constante (aunque se presentan periodos durante los cuales la varianza se aparta de su nivel de largo plazo).
  - La No Estacionariedad de la ST proviene del hecho de que su Varianza no Condicional no se mantiene constante en el tiempo.

# PROCESO ESTOCASTICO HETEROCEDASTICO

- Proceso Estocástico X **Homocedástico**: las desviaciones estándar de los términos  $X_t$  son constantes para todos los instantes  $t$ . En caso contrario el proceso es **Heterocedástico**
- La Heterocedasticidad puede ser de dos tipos:
  - **Heterocedasticidad No Condicional (HrNC)**: las **DE no Condicionales** son No constantes
  - **Heterocedasticidad Condicional (HrC)**: las **DE Condicionales** son No constantes
    - Si  $X_t$  es HrNC, también es HrC, (recíproco no es cierto)
    - Si  $X_t$  no es HrNC entonces es Homocedástico No Condicional.
    - Si  $X_t$  no es HrC entonces es Homocedástico Condicional
  - Enfoques para predecir la Varianza Condicional:
    - Enfoque Ad Hoc: variable independiente  $X_t$ , considerada como factor causante de la volatilidad de la serie  $Y_t$
- Enfoque de Engle (1982): Modelos ARCH

## VARIANZA CONDICIONAL- Enfoque AD HOC

Enfoque Ad Hoc: introducir una variable independiente  $X_t$ , como uno de los factores causante de la volatilidad de la serie  $Y_t$ :

- ❑ Modelo:  $Y_{t+1} = \varepsilon_{t+1} X_t$ , ( $\varepsilon_{t+1} \rightarrow (0, \sigma)$ )
- ❑ Si la variable  $X_t$  es invariante en el tiempo, entonces la realización de  $Y_t$  es un proceso ruido blanco con varianza constante.
- ❑ Si la variable  $X_t$  no es invariante en el tiempo, entonces la varianza de  $Y_{t+1}$  está condicionada por los valores de  $X_t$ :

$$\text{Var}(Y_{t+1}/X_t) = X_t^2 \sigma^2$$

- ❑ Como  $X_t$  se conoce en el periodo  $t$ , la varianza condicional de  $Y_{t+1}$  puede conocerse. Si la serie  $X_t$  exhibe autocorrelación positiva, entonces la varianza condicional de  $Y_{t+1}$  también tendrá ese comportamiento.
- ❑ Problema de este enfoque: asume que se puede conocer la variable que explica el comportamiento de la varianza y su volatilidad

---

## Enfoque ARCH (Engle, 1982)

- ❑ Engle (1982) plantea modelar simultáneamente la media y varianza de la serie, en lugar de usar alguna variable ad hoc para modelar la volatilidad.
- ❑ Si la varianza de los errores no es constante, puede usarse un modelo ARMA para estimar cualquier tendencia en esta varianza.
- ❑ Una de las contribuciones de los procesos ARCH a la literatura econométrica y de ST es el mostrar que:
  - Los aparentes cambios en la volatilidad de ST puede predecirse y que, además
  - Ese fenómeno resulta de un tipo específico de dependencia no lineal, y no de cambios exógenos en variables determinadas.



## 2-PROCESO ARCH(q)

- El Proceso ARCH puede definirse bajo varios contextos. Aquí se define en términos de la distribución de los errores de un modelo de regresión o de un modelo ARIMA.
- Modelo de Regresión:  $y = XB + \varepsilon$ 
  - $\mathbf{X}$ : matriz de variables exógenas
  - $\mathbf{B}$ : vector de parámetros de regresión.
  - $\varepsilon \sim \text{Nid}(\mu, \sigma) \rightarrow e = (y - \hat{y})$
- El modelo ARCH representa la distribución de la perturbación  $\varepsilon_t$ , **condicionada** por los valores realizados del conjunto de variables ( $H_{t-1}$ )
$$H_{t-1} = \{y_{t-1}, x_{t-1}, y_{t-2}, x_{t-2}, \dots\}$$
- Engle (1982) propone la distribución:  $\varepsilon_t | H_{t-1} \sim N(0, h_t)$
- El término  $h_t$  es la Varianza Condicionada (VC)

---

## Proceso ARCH(q): Características

- Varianza Condicionada  $h_t$ :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \quad (i=1, \dots, q)$$

- En el modelo ARCH, la varianza del error  $\varepsilon_t$ , condicionada por los valores de los errores pasados  $\varepsilon_{t-i}$ , es una función creciente del tamaño de esos errores  $\varepsilon_{t-i}$ , indistintamente de sus signos.
- El orden del retardo  $q$  determina la persistencia del shock aleatorio en su efecto condicionante sobre la varianza de errores futuros (tiempo de persistencia del shock). A mayor valor de  $q$ , los episodios de volatilidad tienden a tener mayor duración.

- Los errores NO están Autocorrelacionados:  $E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-i})=0$ , pero **NO son Independientes**: los errores están relacionados a través de sus varianzas.
- En el modelo ARCH(1), la Varianza Condicional del error en  $t$  es función de la varianza del error en  $t-1$ .
- Leptocurtosis de la distribución no condicionada de  $\varepsilon_t$ : las colas son más gruesas que las colas de la distribución normal.
  - En general, los valores de la curtosis son mucho más grandes que 3.
  - Para el modelo ARCH(1), la expresión de la curtosis es:
$$k = [3(1-\alpha_1^2)/(1-3\alpha_1^2)] > 3; \quad 3\alpha_1^2 < 1.$$
  - Condición de existencia:  $[3\alpha_1^2 < 1]$ ; está relacionada con la estacionariedad de la serie. Si no se cumple, entonces la  $\text{var}(\varepsilon_t^2)$  no es finita y la serie  $\varepsilon_t^2$  no es estacionaria.

## Modelo ARCH(1)

- La varianza del término de error es función de la volatilidad observada en el periodo anterior, representada por su error cuadrado:  $\varepsilon_{t-1}^2$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad \alpha_0 > 0, 0 < \alpha_1 < 1$$

- El error  $\varepsilon_t$  es heterocedástico, condicionado por los valores que toma el periodo anterior  $\varepsilon_{t-1}$ .
- Especificación Lineal (no es conveniente para estimación MV)

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + z_t$$

- **Especificación Multiplicativa** (preferible para estimación MV):

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} = z_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

$$z_t \sim \text{Nid}(0,1), (z_t, \varepsilon_t) \text{ Independientes}$$

## Modelo ARCH(1): Parámetros NO Condicionales

Media NO Condicional	$E\varepsilon_t = E[Z_t(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1})^{1/2}] = 0$
Correlación Serial	$E(Z_t Z_{t-1}) = 0 \rightarrow E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = 0$
Varianza NO Condicional	$\begin{aligned} E\varepsilon_t^2 &= E[Z_t^2(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2)] \\ &= E Z_t^2 E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2) \\ E\varepsilon_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 E\varepsilon_t^2 \\ &= \alpha_0 / (1 - \alpha_1) \end{aligned}$

La Media y la Varianza No Condicional:

- No varían en el tiempo
- No se ven afectadas por la presencia del proceso ARCH

## Modelo ARCH(1): Parámetros Condicionales

Media Condicional	$E(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) =$ $E_t z_t E_t (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^{1/2} = 0$
Varianza Condicional	$E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$ $= E_t z_t^2 E_t (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)$ $= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

- La varianza condicional de  $\varepsilon_t$  depende de los valores realizados de  $\varepsilon_{t-1}$ , por lo que el error del proceso es heterocedástico.
- La varianza condicional sigue un proceso autoregresivo de primer orden: por eso se llama proceso autorregresivo heterocedático condicional ARCH(1)

### 3-PROCESO GARCH(p,q)

- Bollerslev (1986) propone el proceso ARCH generalizado (GARCH), estableciendo una nueva forma funcional para la varianza condicionada.
- La nueva forma funcional equivale a imponer una estructura ARMA sobre la varianza condicionada:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p}$$

$$\alpha_0 > 0$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, q$$

$$\beta_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

- La **Varianza Condicional** de  $\varepsilon_t$  es el proceso **ARMA**  $h_t$

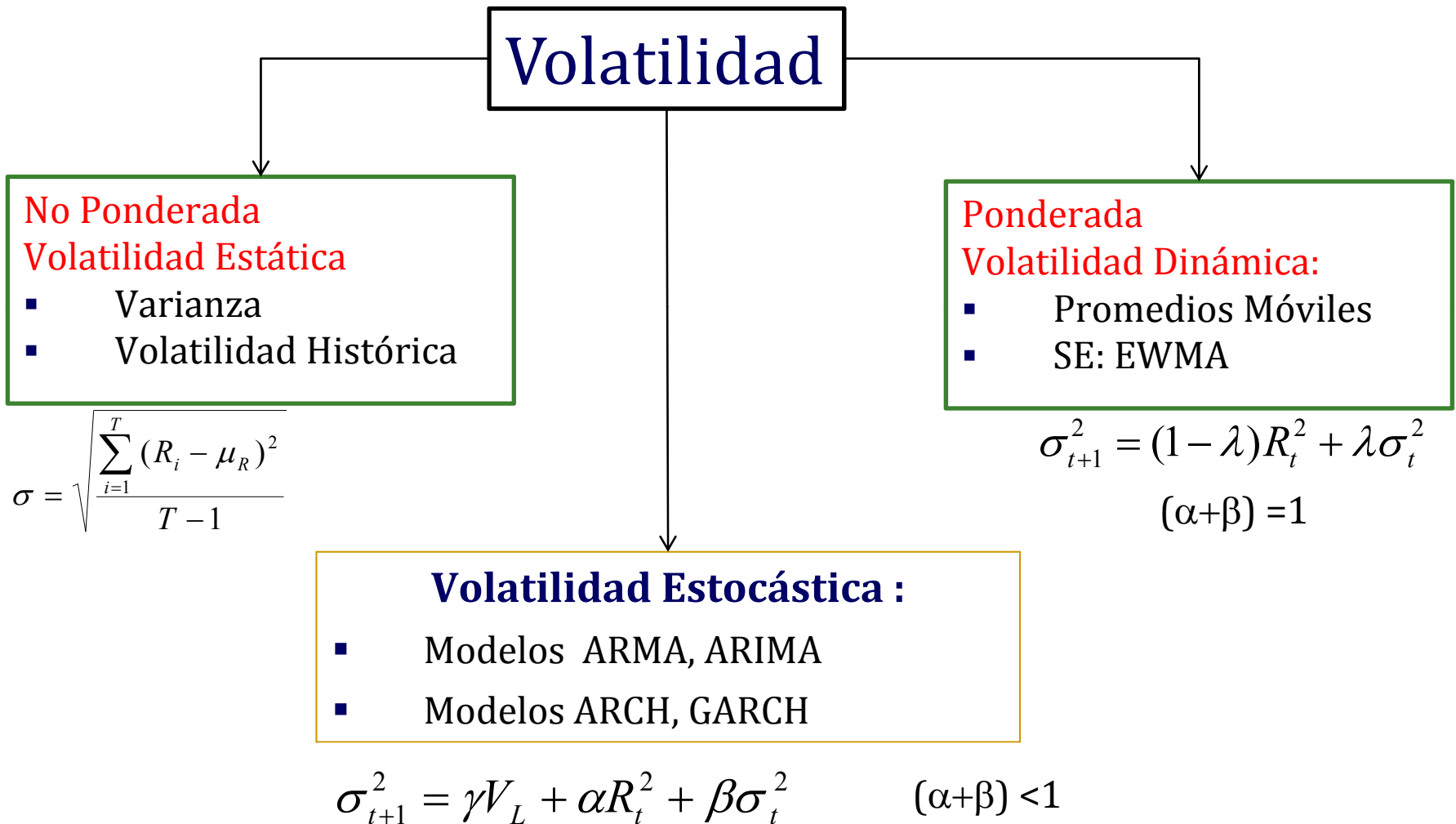
$$E(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) = E_{t-1} \varepsilon_t^2 = h_t$$

$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p}$	<b>GARCH(p,q)</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>El término de error <math>z_t</math> es un proceso ruido blanco y es independiente de <math>\varepsilon_t</math>.</li> <li>La media condicional y no condicional de <math>\varepsilon_t</math> son iguales a cero, como en el modelo ARCH</li> </ul>	$E(\varepsilon_t) = E(z_t) = 0$
<ul style="list-style-type: none"> <li>La varianza condicional de <math>\varepsilon_t</math> es <math>E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = h_t</math></li> <li>Es el proceso ARMA <math>h_t</math></li> </ul>	$\begin{aligned} & \text{Var}(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) \\ &= E(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) \\ &= E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = E_{t-1}(z_t^2 h_t) = h_t \end{aligned}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>GARCH(p,q) es una generalización de ARCH(q).</li> <li>Garch(p,q): más parsimonioso que Arch(q) con un valor q grande.</li> </ul>	Si (p=0,q=1): GARCH(0,1) equivalente a un ARCH(1)
<p>Garch es estacionario con <math>E\varepsilon_t=0</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Varianza No Condicional:  <math>\text{Var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 / [1 - \alpha(B) - \beta(B)]</math>, si <math>[\alpha(B) + \beta(B) &lt; 1]</math></li> <li>Varianza condicional:  <math>\text{Var}(\varepsilon_t) = [\alpha_0 + \alpha(B)E(\varepsilon_t^2)] / [1 - \beta(B)]</math>: varía a lo largo del tiempo.</li> </ul>	$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$ $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0$



<b>GARCH(1,1)</b>	Estructura ARMA(1,1) sobre la varianza condicional: $\varepsilon_t = Z_t \sqrt{h_t} \quad ; \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$
Varianza No Condicional	$\text{Var}(\varepsilon_t) = E[z_t]^2 = E(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 E h_{t-1}$ $= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \text{Var}(\varepsilon_t)$ $\text{Var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 / (1 - (\alpha_1 + \beta_1))$
Varianza Condicional	$\text{Var}(\varepsilon_t) = E_{t-1}[z_t]^2 = E_{t-1}(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} = h_t$
Persistencia de la Volatilidad  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Errores <math>\varepsilon_t</math> No Correlacionados:  <math display="block">\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}] = 0</math></li> <li>▪ Errores No Independientes: se relacionan a través de sus varianzas.</li> <li>▪ Errores Cuadrados (<math>\varepsilon_t^2</math>) Correlacionados</li> </ul>

## 4-Estimación de la Volatilidad



---

# Hechos Estilizados de las Series Volátiles

1. Colas Anchas (Fat Tails)
  2. Volatilidad en Grupos (Clusters) y no Constante (Heterocedástica)
  3. Distribución Simétrica, Acampanada, con Exceso de Kurtosis ( $K > 3$ )
  4. Distribución Normal por agregación de los datos: al incrementarse la unidad de muestreo (observaciones diarias se agregan en datos mensuales, trimestrales,...) la distribución se acerca a la normal, con lo cual, al aumentar la escala de tiempo mejora la normalidad de la distribución.
-

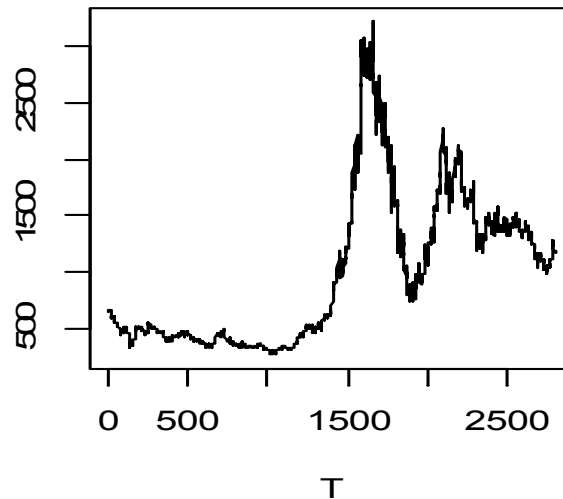
# Hechos Estilizados de las Series Volátiles Heterocedásticas

Series: RY  
Sample 1 2796  
Observations 2795

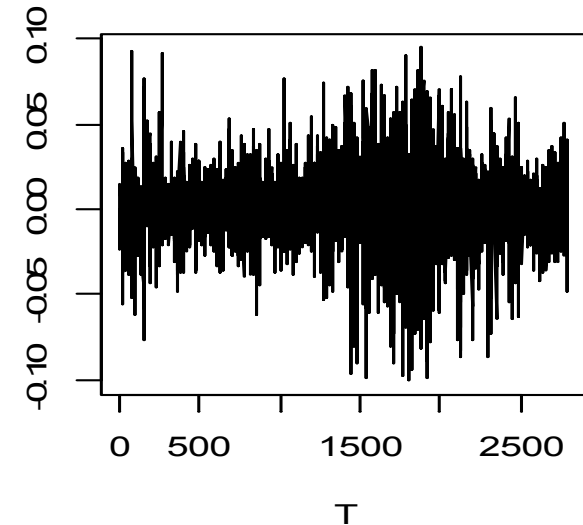
Mean 0.000216  
Median 0.000000  
Maximum 0.095065  
Minimum -0.101090  
Std. Dev. 0.022845  
Skewness -0.170729  
Kurtosis 5.454750

Jarque-Bera 715.3325  
Probability 0.000000

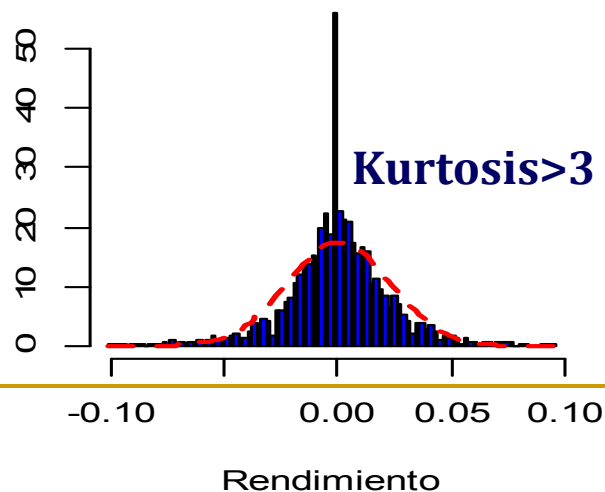
Precio Ry



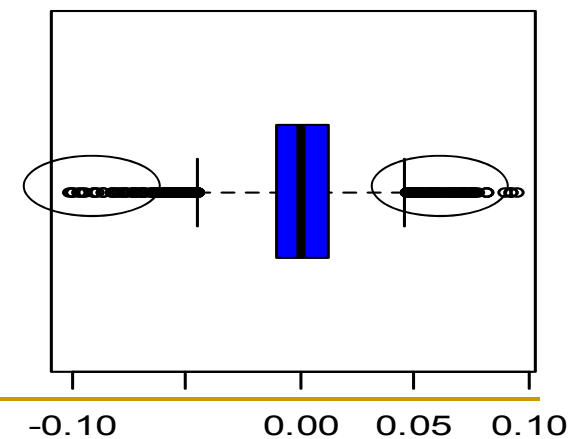
Rendimiento Ry



Histograma Rendimientos



BoxPlot Ry



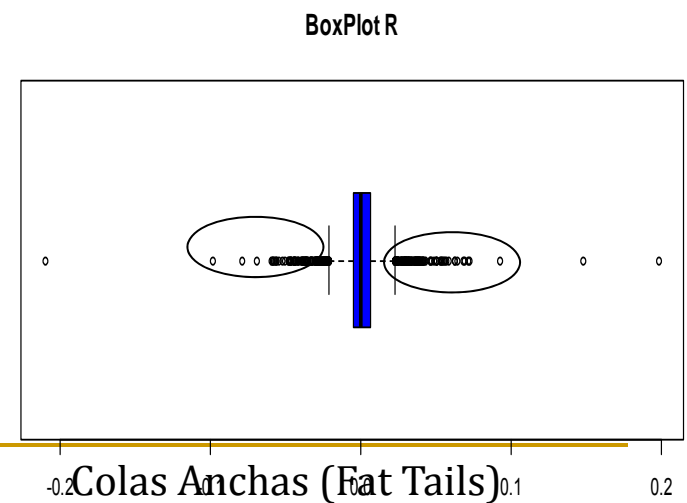
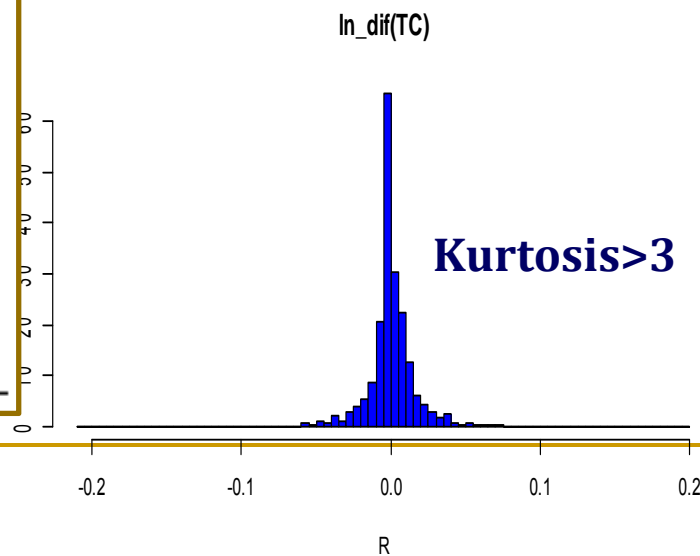
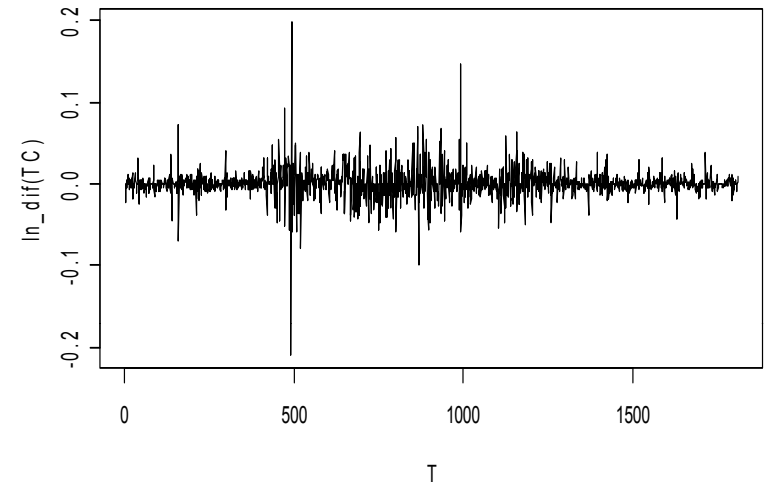
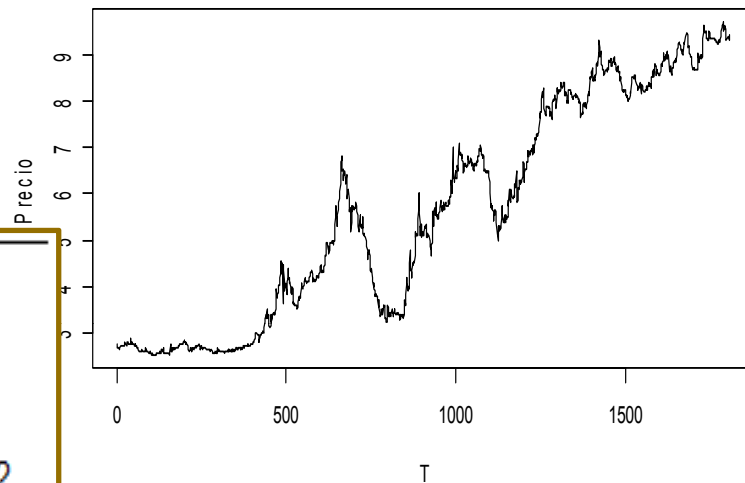
Colas Anchas (Fat Tails)

# Hechos Estilizados de las Series Volátiles Heterocedásticas

## TASA CAMBIO BsF/US\$ PARALELO

Series: TCV\_R  
Sample 1 1810  
Observations 1809

Mean	0.000682
Median	0.000000
Maximum	0.198200
Minimum	-0.209400
Std. Dev.	0.017239
Skewness	0.200382
Kurtosis	30.03327
Jarque-Bera	55095.99
Probability	0.000000



## 1-Suavizamiento Exponencial. Modelo EWMA

- Confiere mayor ponderación a las observaciones más recientes con relación a las más alejadas en el tiempo.
- El parámetro  $\lambda$  es el factor de suavización ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ):
  - Mientras más pequeño sea  $\lambda$ , mayor peso tienen los datos más recientes.
  - A mayor valor de  $\lambda$ , más peso tienen los datos más antiguos.

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^T w_i R_{t-i}^2 = (1-\lambda) \sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} R_{t-i}^2$$

- El modelo de Suavizamiento Exponencial se puede expresar de manera recursiva: promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA):

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda)R_t^2 + \lambda\sigma_t^2$$

## 2-Modelo GARCH(1,1)

- GARCH(1,1): similar al modelo EWMA, excepto que Garch incorpora la volatilidad de largo plazo  $V_L$  (varianza no condicional):

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma V_L + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2 \quad \rightarrow \quad h_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t$$

- Características: Coeficientes no negativos, suman la unidad:
  - $\gamma + \alpha + \beta = 1$ ;  $\gamma \geq 0$ ;  $\alpha \geq 0$ ;  $\beta \geq 0$ .
  - $\alpha + \beta < 1$ : Persistencia
  - $\gamma = 1 - (\alpha + \beta)$ .
  - $\omega = \gamma V_L \rightarrow V_L = \omega / (1 - \alpha - \beta)$
- Reversión al Nivel Medio de Volatilidad (Reversión a la Media):
  - La varianza tiende hacia el nivel promedio  $V_L$
  - Persistencia  $(\alpha + \beta) < 1$ : asegura que los pronósticos de volatilidad tienen reversión a la media.
- Pronóstico de la varianza para  $t+1$ : promedio ponderado de
  - Varianza promedio de largo plazo: constante  $V_L$
  - Varianza actual: término Garch ( $h_t$ )
  - Información sobre la volatilidad observada en  $t$ : término Arch ( $\varepsilon_t^2$ )

---

## Comparación:

GARCH(1,1)

vs

EWMA

$$\sigma_{t+1}^2 = \gamma V_L + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2 \quad \sigma_{t+1}^2 = (1 - \lambda) R_t^2 + \lambda \sigma_t^2$$

□ Modelo EWMA: caso particular del modelo GARCH:

- $\beta = \lambda$ ;  $\alpha = (1 - \lambda) \rightarrow$  Persistencia  $(\alpha + \beta) = 1$ .
- La predicción para cualquier horizonte coincide con la varianza actual:  $\omega = \gamma V_L = 0$
- Se espera que todo shock en volatilidad persista para siempre. Cualquier incremento observado en volatilidad eleva la previsión de volatilidad de todos los períodos futuros en la cuantía del shock.

□ Modelo GARCH: se produce reversión al nivel medio de volatilidad a largo plazo.

---



## 5-ESTIMACION de PARÁMETROS en Modelos GARCH

### Máxima Verosimilitud Modelo Normal

Función de Densidad Normal:  $X \sim \text{NID}(\mu, \sigma)$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Función de Verosimilitud

$$L = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T \left[ \varepsilon_t^2 \right]$$

Maximizar  $\ln L$ :  $\rightarrow$  Ecuaciones Lineales

- Se obtienen las estimaciones MV de los parámetros  $\mu$ ,  $\sigma$
- Las condiciones de primer orden generan ecuaciones lineales, que coinciden con las ecuaciones normales de MCO

# Máxima Verosimilitud: modelo GARCH Normal

- Función de Densidad Normal: Variable  $X \sim \text{NID}(\mu, \sigma_t)$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(X-\mu)^2}{h_t} \right]}$$

**ht NO es constante**

- Función de Verosimilitud 
$$L = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right)$$

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \varepsilon_t^2 / h_t \right]$$

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln(h_t) + \varepsilon_t^2 / h_t \right]$$

- Maximizar  $\ln L$ :  $\rightarrow$  Ecuaciones NO Lineales
  - Se obtienen las estimaciones MV de los parámetros  $\mu, h$
  - Las condiciones de primer orden generan ecuaciones NO lineales cuya solución requiere procedimientos de búsqueda.

## 6-Especificación de Modelos GARCH(p,q)

1. Analizar la estacionariedad de la serie: pruebas Dicky-Fuller-Perron. Hacer las transformaciones necesarias para que la serie se haga estacionaria en caso de que no lo sea.
2. Ajustar modelos ARMA o ARIMA sobre la serie estacionaria.
3. Si el modelo ajustado a la serie es apropiado, entonces los residuos deben seguir un proceso ruido blanco, lo cual se refleja en sus correlogramas simple y parcial.
4. Pruebas de heteroscedasticidad: Pruebas sobre residuos cuadrados. El orden del proceso GARCH se identifica analizando el correlograma de los residuos cuadrados. Esto se debe a que la esperanza condicional  $E_{t-1}\varepsilon_t^2 = h_t$  se asemeja a un proceso ARMA(p,q), por lo que, si existe heteroscedasticidad condicional, ésta debe reflejarse en el correlograma de los residuos al cuadrado
5. Ajustar los modelos identificados mediante MV.

## CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS CUADRADOS

- Estimar el mejor modelo para la serie  $y_t$  (ARMA, regresión).
- Calcular los errores al cuadrado del ajuste realizado  $e_t^2$ , y con ellos calcular la varianza de los residuos  $s^2 = \Sigma e_t^2 / T$ .
- Obtener los coeficientes de autocorrelación simple de los residuos al cuadrado:  $r_i = \Sigma (e_t^2 - s^2)(e_{t-1}^2 - s^2) / \Sigma (e_t^2 - s^2)^2$
- Para muestras grandes, la desviación estándar aproximada de los coeficientes muestrales de auto correlación  $r_i$  es igual a  $s_r = T^{-0.5}$
- Si algún valor individual de  $r_i$  es estadísticamente significativo, es indicio de la presencia de errores GARCH.
- Para probar la significación conjunta de los coeficientes de autocorrelación, usar el estadístico Q-Ljung-Box. Si se rechaza la hipótesis nula de que los coeficientes de autocorrelación son en conjunto iguales a cero, se tiene evidencia de la existencia de errores GARCH.

$$Q = T(T+2) \Sigma r_j^2 / (T-j) \rightarrow \chi_n^2$$

---

## Construcción de Modelos Arch-Garch

1-Identificación del modelo, basándose en los errores al cuadrado. Utilizar los correlogramas de los errores cuadrados, haciendo un análisis similar a la identificación de los modelos ARMA.

2-Estimación del modelo identificado por máxima verosimilitud.

3- Diagnóstico y Bondad del ajuste. Luego de la estimación debe verificarse la bondad del ajuste del modelo a los datos:

3.1-Validación y Bondad del ajuste

3.2-Análisis de Residuos: los residuos no deben estar autocorrelacionados ni mostrar ninguna volatilidad remanente. Usar los correlogramas de los residuos.

3.3-Pruebas Q-Ljung-Box para el modelo de media y el modelo de varianza.

4-Pronóstico de la Varianza Condicional

---

## Bondad del Ajuste: Q-Ljung-Box

- Un buen modelo GARCH debe eliminar la autocorrelación de la serie
- Usar el test Q-Ljung-Box para verificar la autocorrelación de la serie.

Ho: Datos son aleatorios

H1: Datos No son aleatorios

$$Q = n(n+2) \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j} \rightarrow \chi^2_{1-\alpha, k}$$

- n: tamaño muestra
- $\rho_k$ : coef autocorrelación retardo k
- k: número de retardos

Rechazar Ho si

$$Q > \chi^2_{1-\alpha, k}$$

$$\chi^2_{1-\alpha, k} : \alpha\_ \text{cuantil\_chi2}, k \text{ gl}$$

## 7-PRONÓSTICO DE VOLATILIDAD GARCH(1,1)

- $\sigma_n^2 = (1 - \alpha - \beta)V_L + \alpha R_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$
- $\sigma_n^2 - V_L = \alpha (R_{n-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n-1}^2 - V_L)$

Para  $(n + t)$

- $\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha (R_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$

Valor Esperado

- $E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = \alpha E[R_{n+t-1}^2 - V_L] + \beta E[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$

- $E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta) E[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$

- Aplicando recursividad:

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta) \underbrace{E[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]}_{(\alpha + \beta) E[\sigma_{n+t-2}^2 - V_L]}$$

- Se llega a la ecuación para pronosticar la volatilidad para el día  $n+t$ , basándose en la información del día  $n$ .

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta)^t (\sigma_n^2 - V_L)$$

$$E[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^t (\sigma_n^2 - V_L)$$



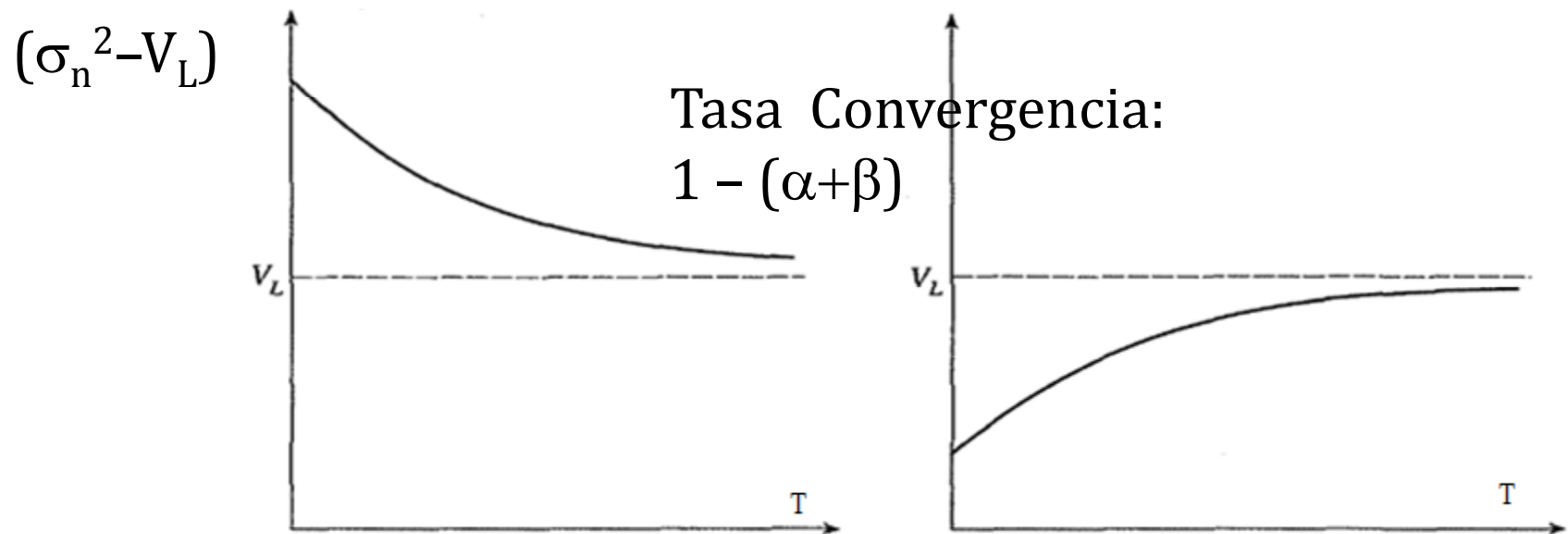
## GARCH(1,1): PRONOSTICO VOLATILIDAD

Valor Esperado de Volatilidad para  $n+t$ :

$$E[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^t (\sigma_n^2 - V_L)$$

- El término  $(\sigma_n^2 - V_L)$ : representa la distancia entre la varianza actual y la varianza de largo plazo.
- Persistencia en Volatilidad  $(\alpha + \beta)$  de la serie: representa la tendencia a converger hacia la varianza de largo plazo.
- Reversión al nivel medio de volatilidad:
  - Se hace a la tasa:  $1 - (\alpha + \beta)$ .
  - A mayor persistencia, menor tendencia a acercarse a  $V_L$ , y mayor tendencia a mantenerse cerca de la varianza actual.
  - El tiempo necesario para converger a la  $V_L$  es mayor mientras mayor sea la persistencia de la serie.

# REVERSION AL NIVEL MEDIO DE VOLATILIDAD Y PERSISTENCIA



$$\sigma_n^2 = (1 - \alpha - \beta) V_L + \alpha R_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

Tasa Reversión

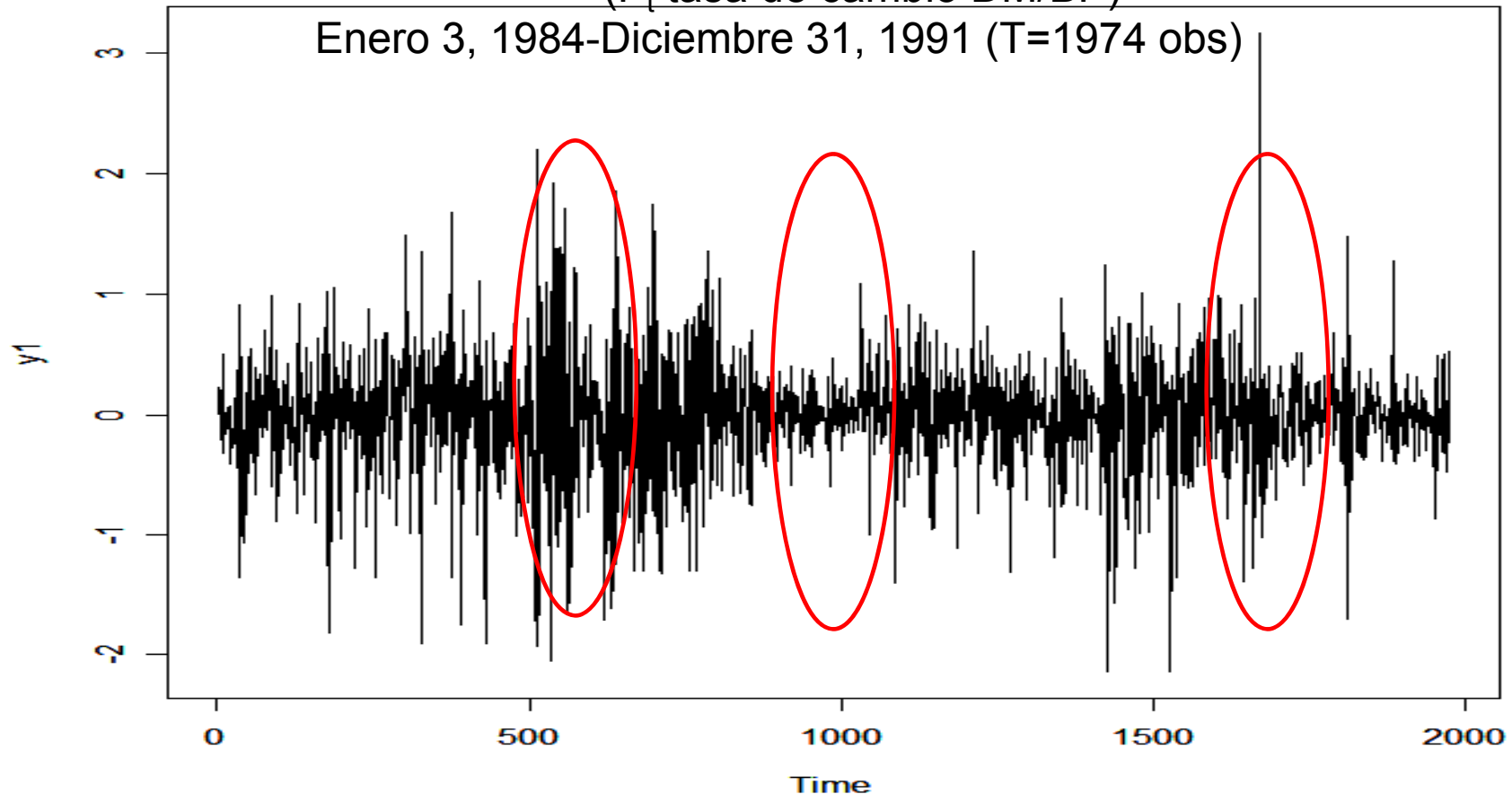
Nivel Reversión

## ANALISIS DE UNA SERIE ESPECIAL: LOS CLUSTERS DE VOLATILIDAD

**DmBpARCH.R**

Rendimiento Porcentual Nominal Diario:  $Y_t = 100[\ln(P_t/P_{t-1})]$   
( $P_t$  tasa de cambio DM/BP)

Enero 3, 1984-Diciembre 31, 1991 (T=1974 obs)



Bollerslev, T; Ghysels, E, "Periodic Autoregressive Conditional Heteroscedasticity",  
*Journal of Business and Economic Statistics*, Vol 14, 1996, pp. 139-151.

- Gráfico de la ST: se observan clusters de datos
- Modelo inicial:  $Y_t = \mu + \varepsilon_t$

### Equation Estimation

**Specification**   **Options**

Equation specification

Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like  $Y=c(1)+c(2)*X$ .

y d

Estimation settings

Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)

Sample: 1 1974

### Equation: ARCH0   Workfile: DMBPDIA::Dmbpdaily\

View   Proc   Object   Print   Name   Freeze   Estimate   Forecast   Stats   Resids

Dependent Variable: Y  
Method: Least Squares  
Date: 07/17/12   Time: 12:15  
Sample: 1 1974  
Included observations: 1974  
White heteroskedasticity-consistent standard errors & covariance

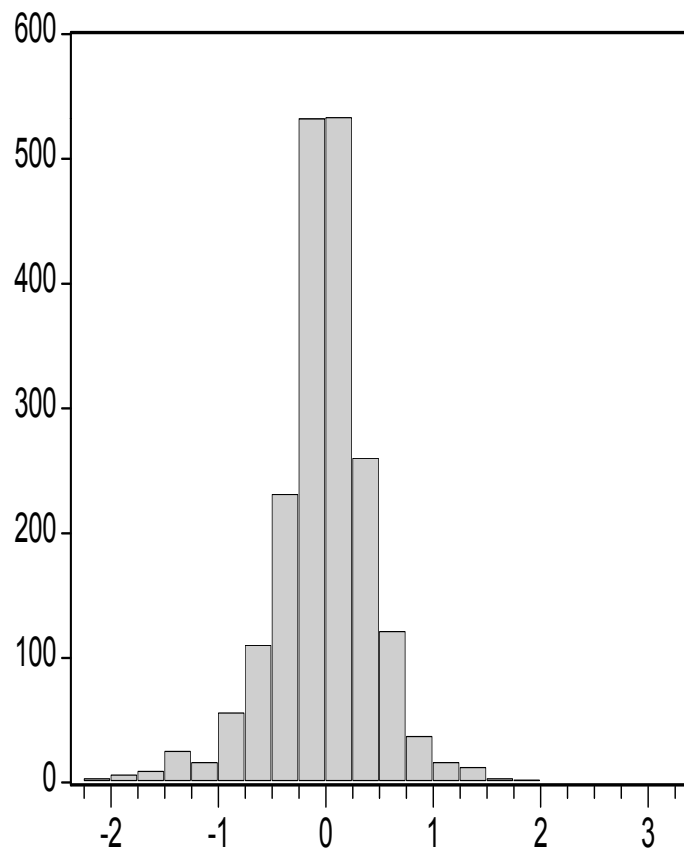
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.016427	0.010584	-1.552039	0.1208

R-squared	0.000000	Mean dependent var	-0.016427
Adjusted R-squared	0.000000	S.D. dependent var	0.470244
S.E. of regression	0.470244	Akaike info criterion	1.329378
Sum squared resid	436.2892	Schwarz criterion	1.332209
Log likelihood	-1311.096	Hannan-Quinn criter.	1.330418
Durbin-Watson stat	1.980542		

# Residuos Cuadrados

- Los Correlogramas de los Residuos no revelan patrón alguno
- Prueba Raiz Unitaria no es significativa
- Análisis de Residuos Cuadrados: características particulares:



Series: Y  
Sample 1 1974  
Observations 1974

Mean	-0.016427
Median	-0.000692
Maximum	3.172595
Minimum	-2.144295
Std. Dev.	0.470244
Skewness	-0.249514
Kurtosis	6.627654
Jarque-Bera	1102.882
Probability	0.000000

Yt=100[ln(Pt)-ln(Pt-1)]= μ+ ε		
	Statistic	p-value
Skewness	-0.25	
Excess kurtosis	3.6	
Jarque-Bera	1102.9	< 0.0001
Q(20)	27.8	0.113
Q <sup>2</sup> (20)	507.6	< 0.0001
LM ARCH(1)	96.2	< 0.0001
LM ARCH(8)	185.3	< 0.0001

<p>Prueba Normalidad (Jarque-Bera)</p>	<p>La distribución no condicional del error en un proceso ARCH es leptocúrtica no normal:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Se rechaza la hipótesis de normalidad (JB=1102.9)</li> <li>▪ La distribución está caracterizada por leptocurtosis (k=6.63)</li> </ul>
<p>Autocorrelación de los residuos y de los residuos al cuadrado (Ljung-Box-Pierce)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Residuos no están correlacionados: <math>Q(20)=27.8</math> (<math>p=0.11</math>)</li> <li>▪ Los Residuos al cuadrado están correlacionados: <math>Q^2(20)=507</math> (<math>p&lt;0.001</math>). Se rechaza la hipótesis de homocedasticidad condicional.</li> <li>▪ La caída lenta del correlograma de los <math>r^2</math> sugiere un GARCH(1,1). Un proceso ARCH no es conveniente</li> </ul>
<p>Prueba LM de Efectos ARCH Ho: Los Errores no siguen un proceso ARCH Rechazar Ho si el estadístico <math>(N-q) \cdot R^2 &gt; \chi^2_q</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ LM ARCH(1)= 96.2 (<math>p&lt;0.001</math>).</li> <li>▪ LM ARCH(8)= 185.3 (<math>p&lt;0.001</math>)</li> </ul> <p>Se confirma la presencia de efectos ARCH en los datos</p>

## Modelos Ajustados:

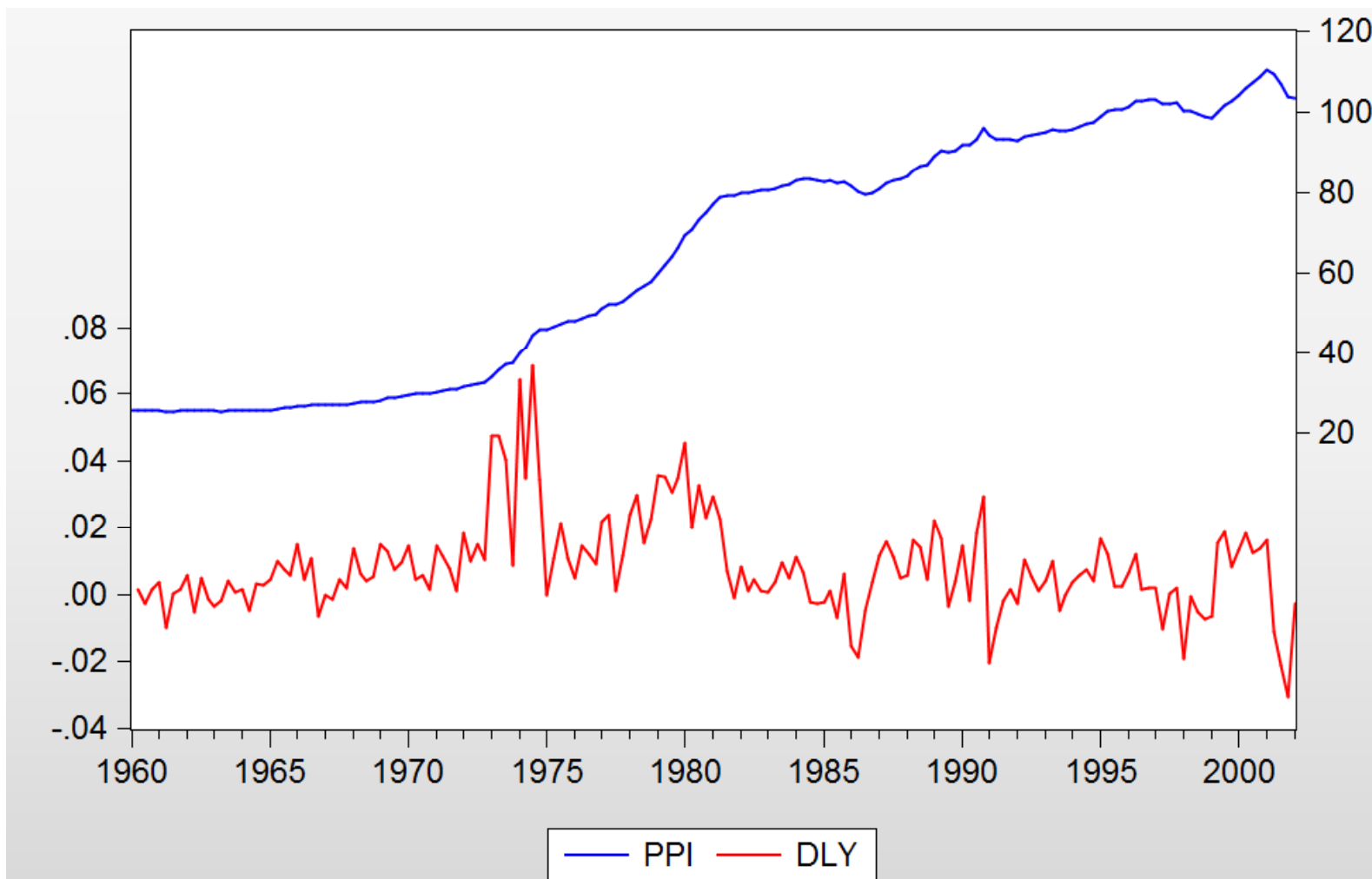
Modelo ARCH(1)	$h_t = 0.146 + 0.372 e_{t-1}$
Modelo GARCH(1,1)	$h_t = 0.01 + 0.14 e_{t-1}^2 + 0.82 h_{t-1}$  Residuos estandarizados $res_t = e_t / \sqrt{h_t}$
Modelo T-GARCH(1,1)	$h_t = 0.003 + 0.12 e_{t-1}^2 + 0.88 h_{t-1}$

Gráfico de Residuos Estandarizados del Modelo GARCH(1,1):

- No se evidencian irregularidades en las pruebas formales
- Se mantiene leptokurtosis y ausencia de normalidad

## Modelo1 Ajustado con EVIEWS

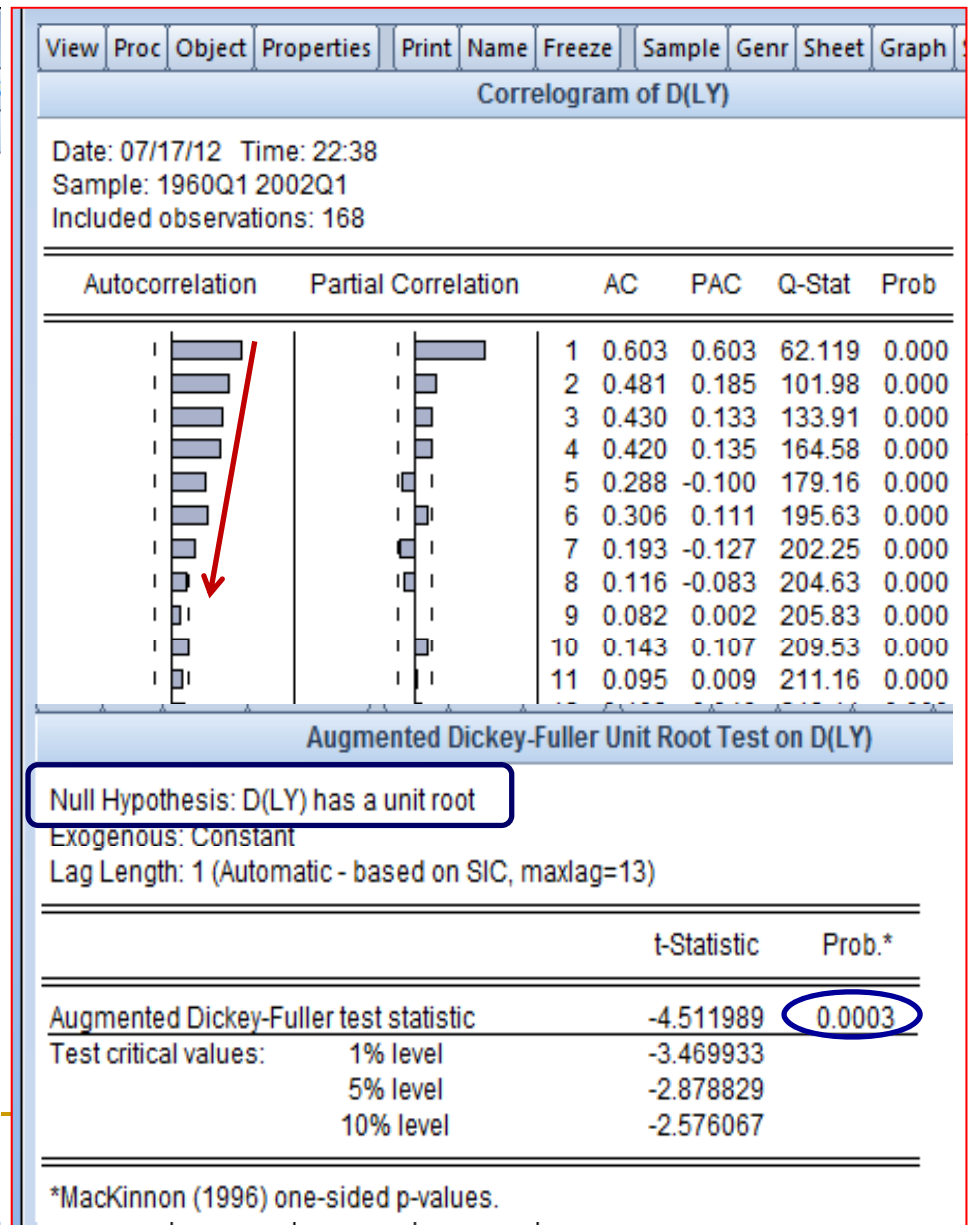
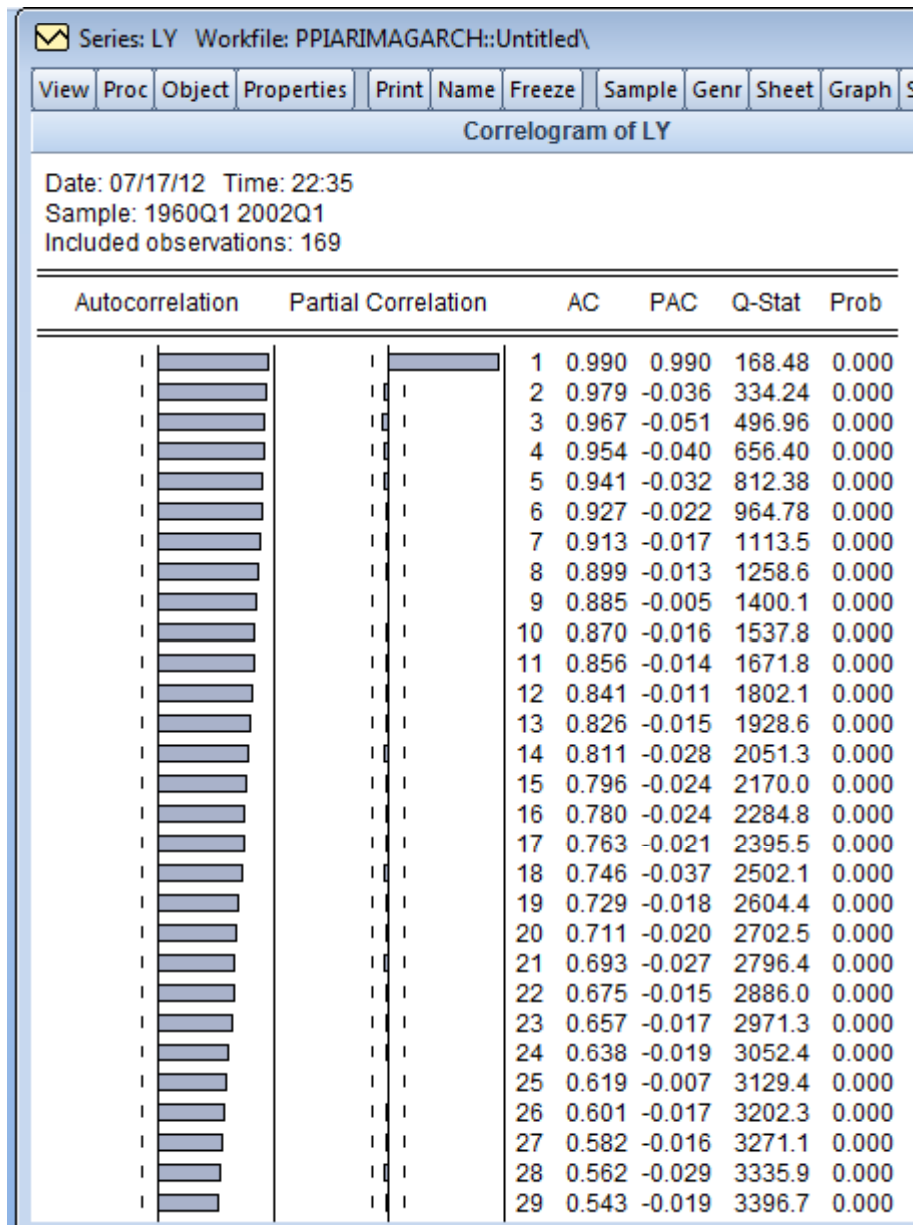
- PPI: Indice Precios Productor. USA. T=1960Q1-2002Q1
- Serie no Estacionaria y Heterocedástica.
- Diferencia Regular  $\text{Log(PPI)} = \text{Tasa de Inflación} = \text{DLY}$



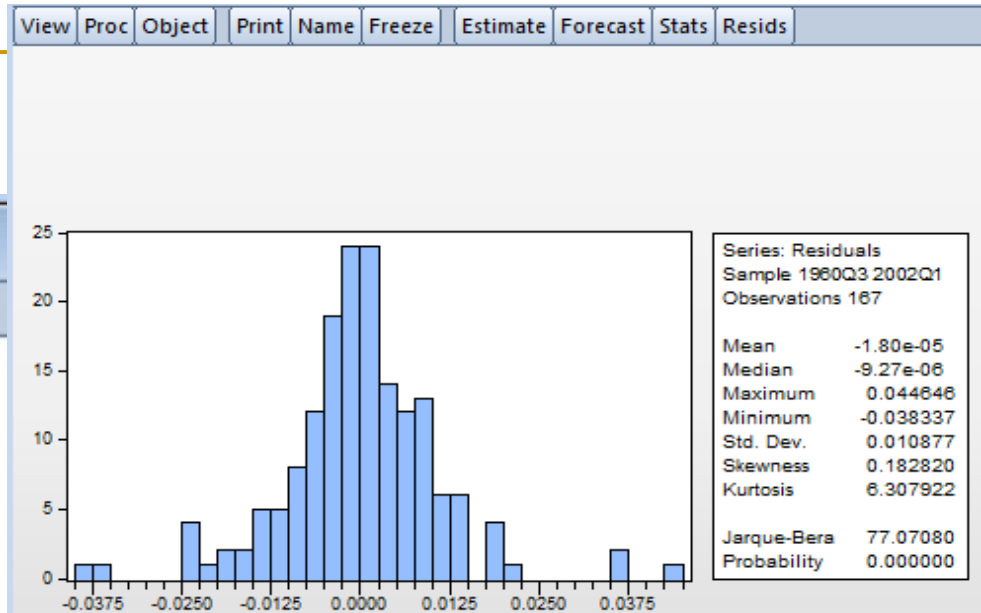


## Correlogramas LY

## Correlogramas d(LY)



# M1: ARIMA(1,1,1)



Equation: UNTITLED Workfile: PPIARIMAGARCH::Untitled\

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: D(LY)

Method: Least Squares

Date: 07/17/12 Time: 23:01

Sample (adjusted): 1960Q3 2002Q1

Included observations: 167 after adjustments

Convergence achieved after 7 iterations

MA Backcast: 1960Q2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.008092	0.003629	2.229971	0.0271
AR(1)	0.872379	0.058040	15.03057	0.0000
MA(1)	-0.457266	0.102635	-4.455274	0.0000

R-squared	0.407837	Mean dependent var	0.008398
Adjusted R-squared	0.400615	S.D. dependent var	0.014135
S.E. of regression	0.010943	Akaike info criterion	-6.174369
Sum squared resid	0.019640	Schwarz criterion	-6.118357
Log likelihood	518.5598	Hannan-Quinn criter.	-6.151635
F-statistic	56.47532	Durbin-Watson stat	1.958243
Prob(F-statistic)	0.000000		

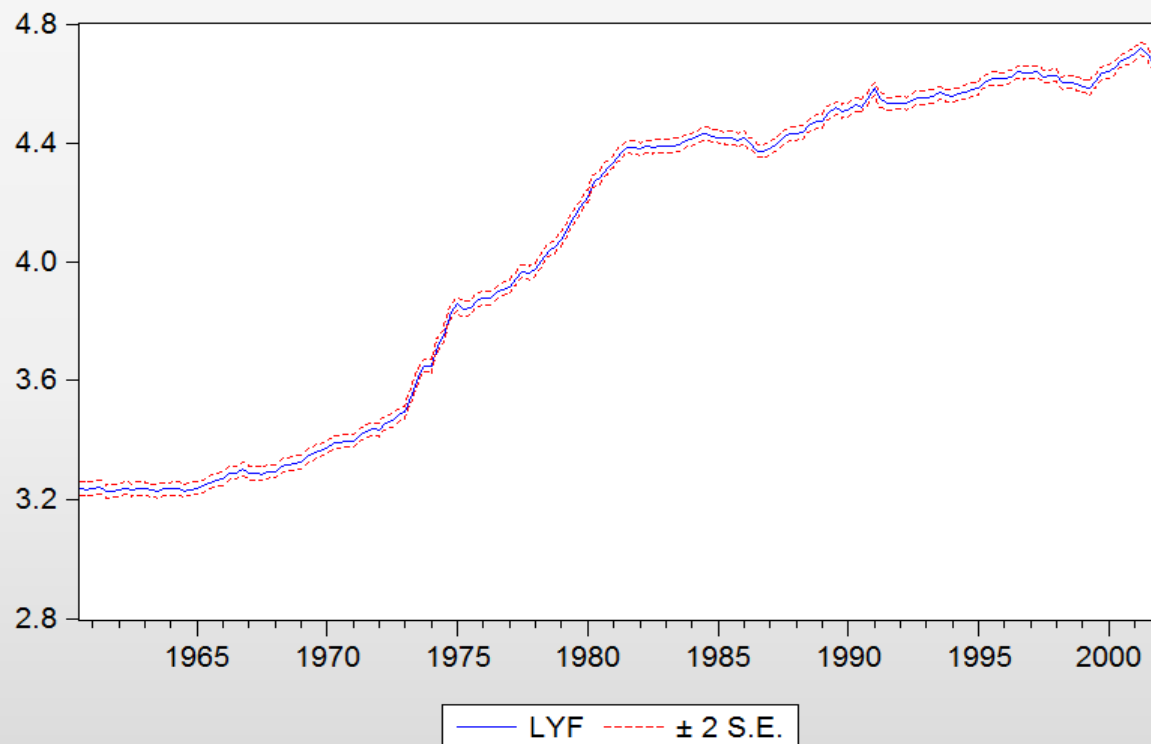
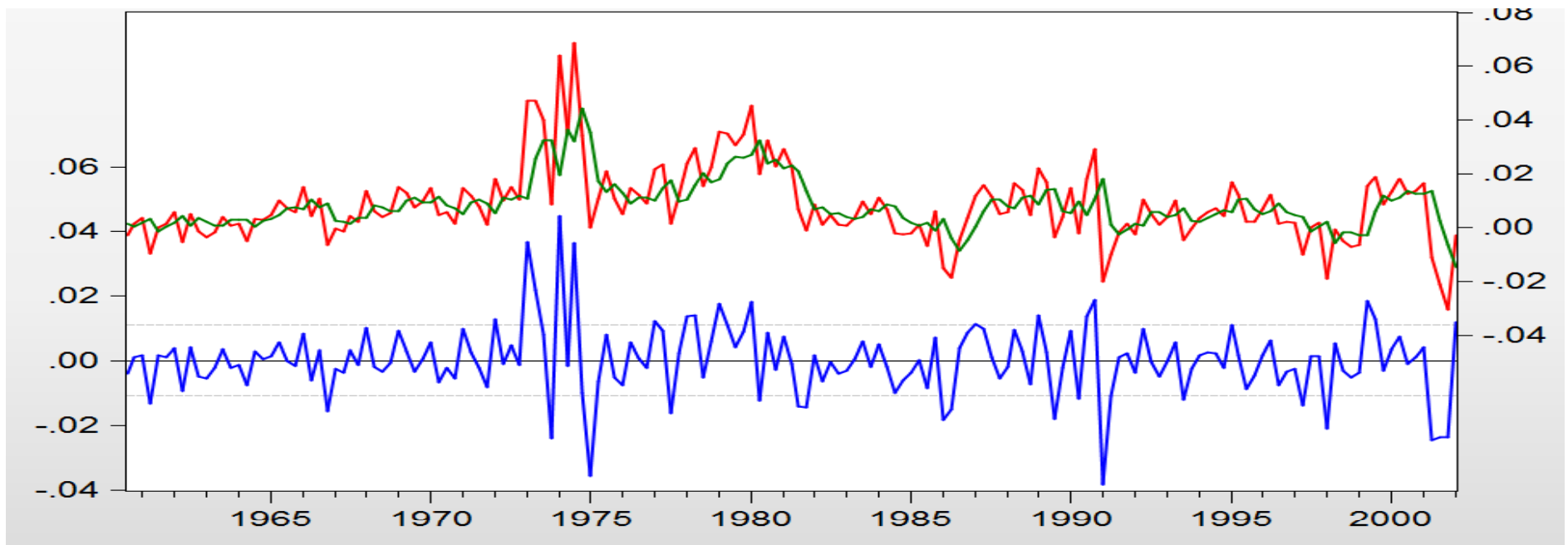
Inverted AR Roots	.87
Inverted MA Roots	.46

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Correlogram of Residuals

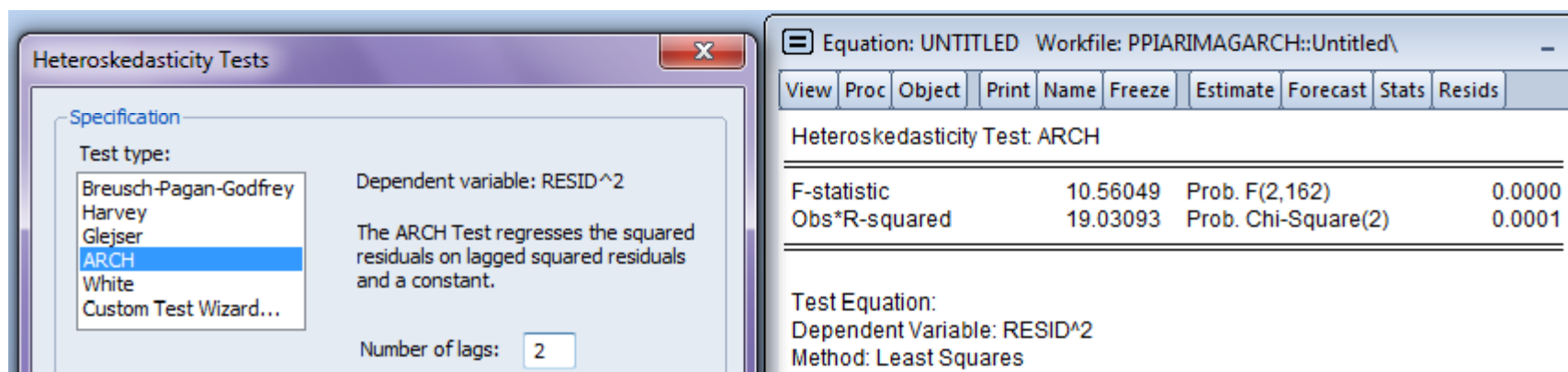
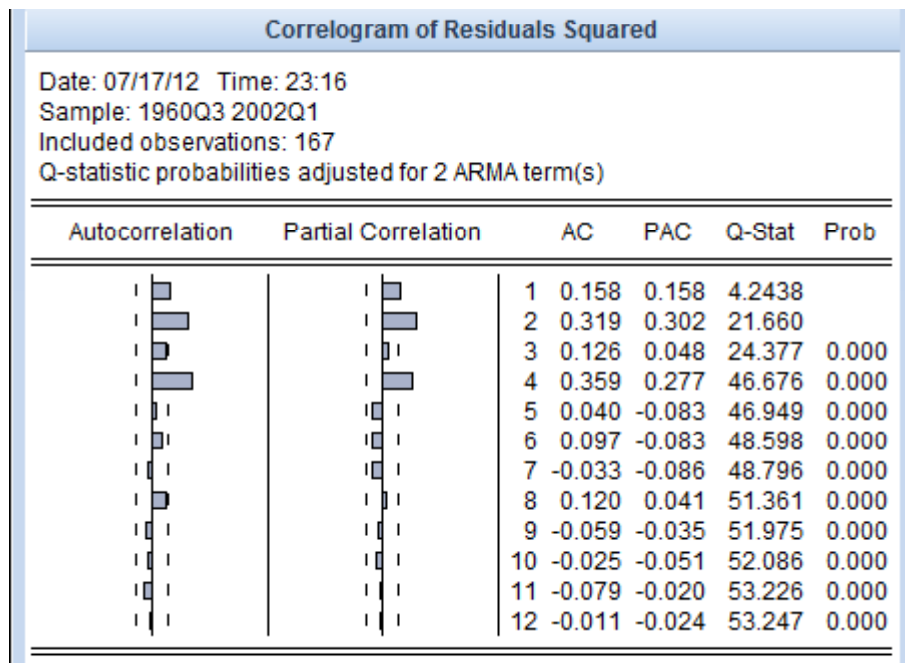
Date: 07/17/12 Time: 23:13  
Sample: 1960Q3 2002Q1  
Included observations: 167  
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.017	0.017	0.0485
		2	-0.059	-0.060	0.6495
		3	-0.002	-0.000	0.6504
		4	0.142	0.139	4.1381
		5	-0.074	-0.081	5.0895
		6	0.123	0.147	7.7617
		7	-0.034	-0.054	7.9707
		8	-0.123	-0.130	10.644
		9	-0.138	-0.118	14.068
		10	0.062	0.009	14.748
		11	-0.072	-0.062	15.687
		12	-0.065	-0.046	16.448
		13	0.072	0.107	17.393
		14	0.035	0.027	17.615
		15	-0.020	0.041	17.689
		16	0.009	-0.015	17.704
		17	0.038	-0.005	17.983
		18	-0.002	-0.004	17.984

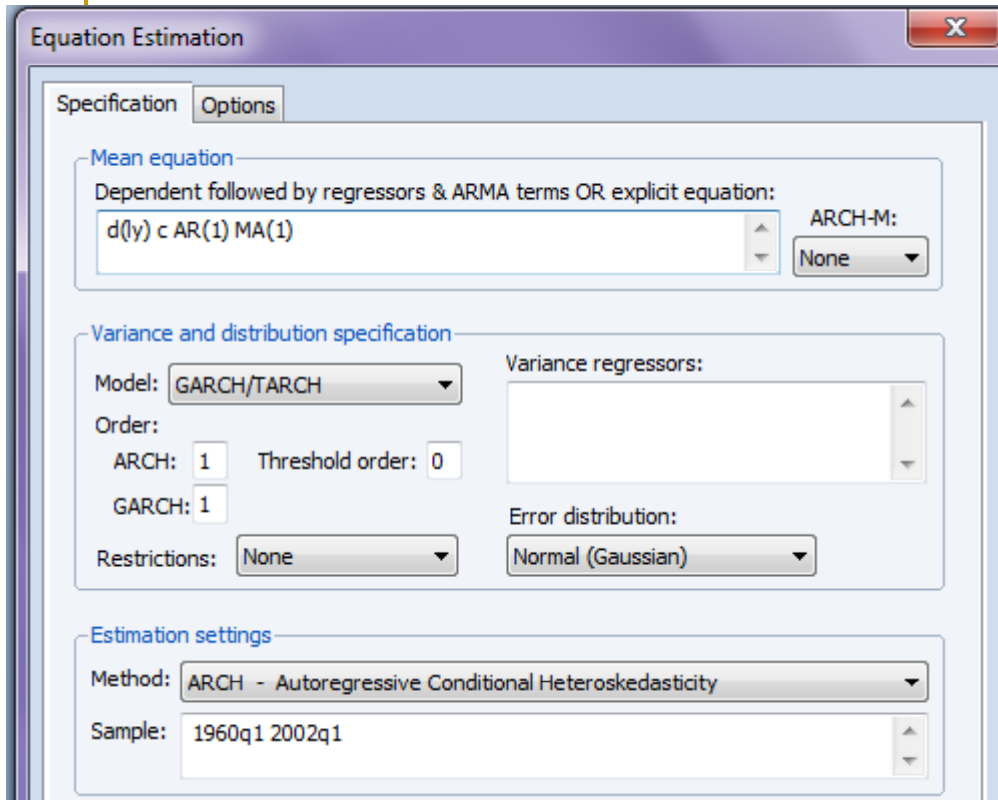


Forecast: LYF  
 Actual: LY  
 Forecast sample: 1960Q1 2002Q1  
 Adjusted sample: 1960Q3 2002Q1  
 Included observations: 167  
 Root Mean Squared Error    0.010845  
 Mean Absolute Error        0.007541  
 Mean Abs. Percent Error    0.186853  
 Theil Inequality Coefficient 0.001329  
     Bias Proportion        0.000003  
     Variance Proportion    0.008636  
     Covariance Proportion 0.991362

# PRUEBAS DE HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL



# ARIMA(1,1,1) + GARCH(1,1)



View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: D(LY)  
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution  
 Date: 07/17/12 Time: 23:34  
 Sample (adjusted): 1960Q3 2002Q1  
 Included observations: 167 after adjustments  
 Convergence achieved after 28 iterations  
 MA Backcast: 1960Q2  
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)  
 GARCH = C(4) + C(5)\*RESID(-1)^2 + C(6)\*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.005374	0.002914	1.844305	0.0651
AR(1)	0.861504	0.059011	14.59897	0.0000
MA(1)	-0.488733	0.122965	-3.974566	0.0001

Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.76E-05	1.15E-05	1.532583	0.1254
RESID(-1)^2	0.216187	0.091502	2.362653	0.0181
GARCH(-1)	0.639291	0.168918	3.784627	0.0002

R-squared	0.403226	Mean dependent var	0.008398
Adjusted R-squared	0.395948	S.D. dependent var	0.014135
S.E. of regression	0.010986	Akaike info criterion	-6.346597
Sum squared resid	0.019793	Schwarz criterion	-6.234573
Log likelihood	535.9408	Hannan-Quinn criter.	-6.301129
Durbin-Watson stat	1.865199		

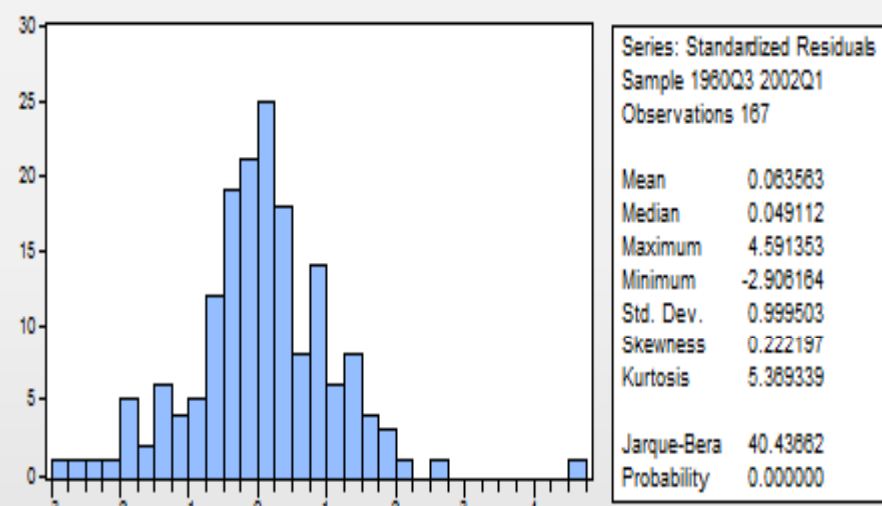
$$D(LY)_t = 0.0054 + 0.86 D(LY)_{t-1} - 0.49 \varepsilon_{t-1}$$

$$h_t = 1.76E-5 + 0.22 (\varepsilon_{t-1})^2 + 0.64 h_{t-1}$$

Persistencia = 0.22 + 0.64 = 0.86



# Diagnóstico Modelo 1



## Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	2.253094	Prob. F(4,158)	0.0658
Obs*R-squared	8.795860	Prob. Chi-Square(4)	0.0664

## Correlogram of Standardized Residuals Squared

Date: 07/18/12 Time: 00:04

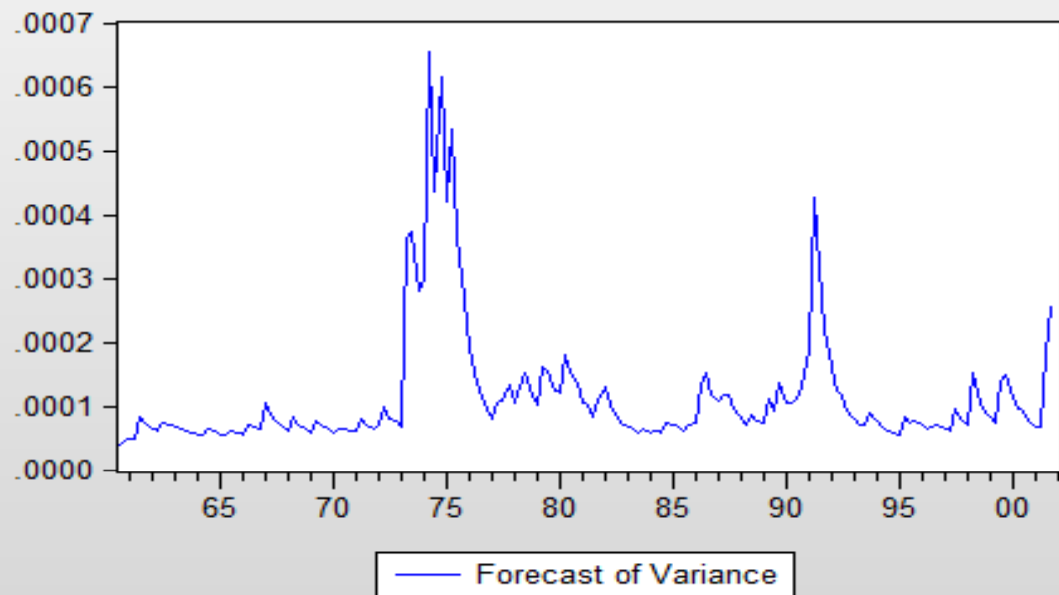
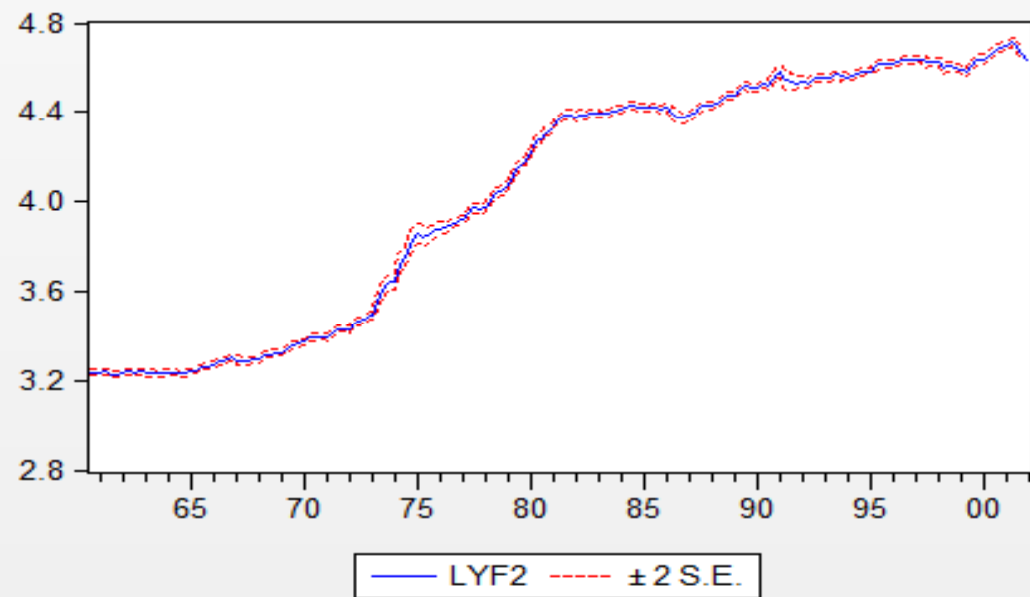
Sample: 1960Q3 2002Q1

Included observations: 167

Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.013	0.013	0.0294	
		2 -0.027	-0.027	0.1500	
		3 -0.016	-0.015	0.1920	0.661
		4 0.220	0.220	8.5494	0.014
		5 -0.023	-0.032	8.6393	0.034
		6 0.031	0.045	8.8112	0.066
		7 -0.075	-0.075	9.8143	0.081
		8 0.137	0.099	13.138	0.041
		9 -0.052	-0.054	13.625	0.058
		10 -0.058	-0.070	14.234	0.076
		11 -0.076	-0.043	15.283	0.083
		12 -0.000	-0.060	15.283	0.122
		13 -0.037	-0.006	15.532	0.159
		14 -0.062	-0.061	16.239	0.181
		15 -0.072	-0.029	17.211	0.190
		16 0.095	0.094	18.887	0.169
		17 -0.021	-0.016	18.973	0.215
		18 0.024	0.068	19.080	0.265
		19 -0.071	-0.057	20.037	0.272
		20 0.099	0.078	21.912	0.236
		21 -0.040	-0.053	22.216	0.274
		22 -0.055	-0.084	22.810	0.298
		23 -0.081	-0.044	24.084	0.289

## Pronóstico Modelo 1



Modelo1 Ajustado con Stata:

**arch d.lppi, ar(1) ma(1) arch(1) garch(1)**

Iteration 15: log likelihood = 538.5763

ARCH family regression -- ARMA disturbances

Sample: 2 - 169

Distribution: Gaussian

Log likelihood = 538.5763

Number of obs = 168

wald chi2(2) = 307.39

Prob > chi2 = 0.0000

D.lppi		Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
<b>lppi</b>	_cons	.0049261	.0028999	1.70	0.089	-.0007576	.0106099
<b>ARMA</b>	ar L1.	.8567799	.0594179	14.42	0.000	.740323	.9732369
	ma L1.	-.4730103	.1256903	-3.76	0.000	-.7193588	-.2266617
<b>ARCH</b>	arch L1.	.2288776	.101372	2.26	0.024	.030192	.4275631
	garch L1.	.6026424	.1939788	3.11	0.002	.2224509	.9828339
	_cons	.000002	.0000135	1.48	0.140	-6.54e-06	.0000465

ipp.dat



Modelo2 Ajustado con Stata:

**arch d.lppi, ar(1) ma(1,4) arch(1) garch(1)**

ARCH family regression -- ARMA disturbances

Sample: 2 – 169

Distribution: **Gaussian**

Log likelihood = **541.0143**

Number of obs = **168**

wald chi2(3) = **126.21**

Prob > chi2 = **0.0000**

D.lppi		Coef.	OPG Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
<b>lppi</b>	_cons	.0052327	.0026806	1.95	0.051	-.0000212	.0104865
<b>ARMA</b>	ar						
	L1.	.7015798	.0971857	7.22	0.000	.5110994	.8920602
	ma						
	L1.	-.2648847	.1272436	-2.08	0.037	-.5142776	-.0154918
<b>ARCH</b>	L4.	.2643205	.0972617	2.72	0.007	.0736911	.4549499
	arch						
	L1.	.2260482	.1106917	2.04	0.041	.0090964	.443
	garch						
	L1.	.6040896	.1984732	3.04	0.002	.2150893	.9930899
	_cons	.0000195	.0000127	1.53	0.125	-5.40e-06	.0000443

ipp.dat

---

## REFERENCIAS

- Engle, R.(1982). “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*,50,(July), pp.987-1007.
- Bollerslev, T.(1986). “Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-27.
- Engle, R.; Bollerslev,T.(1986). “Modelling the Persistence of Conditional Variances”, *Econometric Reviews*,5, pp.1-50.
- Box, G.; Jenkins, G.; Reinsel,G.(1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 3rd ed. Prentice Hall. Holden Day.
- Brooks, Chris (2002). *Introductory Econometrics for Finance*. 2<sup>nd</sup> Ed Cambridge UP. London.
- Enders, W.(2004). *Applied Econometric Time Series*. 2<sup>nd</sup> Ed. Wiley.